442. みんこうすきーノ定理ノ一変形

森本清吾(物理学校)

Khinchine ガ Math. Ann. 111 S. 631–637 デ次ノ定理ヲ証明シテ居ル。

「$\alpha x-\beta+y$（α ハ無理数, β ハ実数, x, y ハ整数）ニ於イテ

$$|x(\alpha x-y+\beta)|<\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{5}} \quad (x>0) \text{ ---------- (1)}$$

ナル如キ x, y ノ組ハ無数ニ存在スル。」

ツマリみんこうすきーノ定理ニ $x>0$ ナル條件ヲ加ヘタ変形デアル。$x<0$ ノ範囲ハ考ヘテ居ナイノデアルカラ $\alpha x-y+\beta=0$ ガコノ範囲デ格子点ヲ過ッテモヨイワケデ, ソノトキハ (1) ノ右辺ハ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ヨリ小サクハ出来ナイコトハふるうゐつつーぼれるノ定理カラ明デアルカラ、コノ結果ハソノ意味デ最良ノ結果デアル。

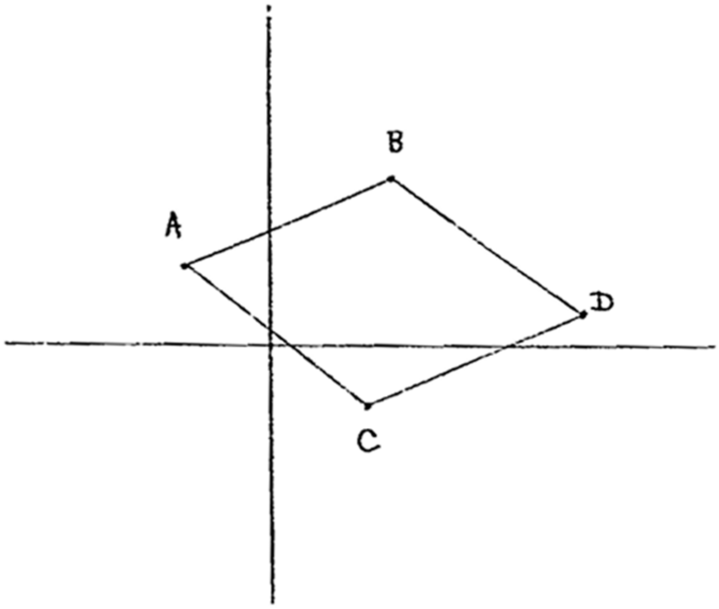
然シ (1) ノ右辺ガ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ニ近イノハ $\alpha x-y+\beta=0$ ガ Y 軸ノ左側デ格子点ヲ過ルカ又ハ格子点ノ非常ニ近クヲ過ル場合デアラウコトハ想像サレル。ソレ故 Y 軸ノ左側ニ於ケル $|x(\alpha x-y+\beta)|$ ニアル制限ヲ與ヘレバ (1) ノ右辺ハソレニ應ジテモット小サクナルデアラウ。コノ意味ニ於テコノ問題ヲ研究シテ見ヨウ。

著者ノ論文 Über die Größenordnung u.s.w. ノ I. Japanese Journal of Math. III. pp1–26 デ著者ハ

$$L : \alpha x - y + \beta = 0$$

ノ *Näherungspunkt* ナルモノヲ定メ、ソノ分布状態ニツイテ述ベタ。

ソノ中，最初ノ結果トシテ L ト Y 軸トニヨッテ分タレタ四ツノ部分ノ中ノ一ツノ中ニ二点，ソノ隣リニ一点ヅツアリ且ツ面積 1 ノ平行四辺形ノ頂点トナルヤウナ *Näherungspunkt* ノ組ガ無数ニアル（pp. 6.7 ヘンノ P_m, P_l'', P_n, Q_n）ト云フコトヲ特記シテオク。コノ四ツノ近似点ノ近似度ヲ比較シテ見ヨウ。L ヲ X 軸ニ Y 軸ヲ Y 軸ニ変換スルヤウナ面積不変ノ *Affin* 変換ヲ行ッタトキ、カヤウナ四点ガ A, B, C, D ニ来タトシ、A ガ第二象限ニ B, D ガ第一象限ニ C ガ第四象限ニアッタトシ ACDB ガコノ順ニ平行四辺形ノ頂点トナッタトスル。ヤリ方ニ依ッテ A ハ $(-a, a)$ ト云フ座標ヲモツヤウニトルコトガ出来ル。B, C ノ座標ヲ (x, y), (u, v) トスルト D ノ座標ハ $(x+u+a,\ y-v-a)$ トナル。コレ等ノ点ニ対応スル近似点ニツイテ $|x(\alpha x - y + \beta)|$ ノ値ハコレラノ点ノ x 座標ト y 座標トノ積ニ等シイ。A ダケヲ Y 軸ノ左側ノ近似点ニ対応スル点トスレバ問題ハ a ヲ常数トシ平行四辺形 ABCD ノ面積ガ 1 ナルトキ



$$\mathrm{Min}\,(xy,\ uv,\ (x+u+a)(y-u-a))$$

ノ最大値ヲ求メルト云フコトニ歸スル。コノ Min ヲRトスレバ $xy=\pm R$ ナル曲線ハ B, C, D ノ何レカヲ過ル。他ノ点ガコノ曲線上ニナイトキハ BD ヲソノ直線上ニズラシ又 AC ノ長サト AB ノ長サヲカヘ（▱ABCD＝1 ナルヤウニ）テRヲ次第ニ大キクシ、遂ニ B, C, D ガ皆コノ曲線上ニアルヤウニスルコトガ出來ル。

故ニコノトキダケヲ考ヘレバヨイコトニナル。コノトキRノ値ヲξトオケバ

$$xy=\xi,\quad uv=\xi,\quad (x+u+a)(y-u-a)=\xi$$

$$(x+a)(v+a)+(y-a)(u+a)=1$$

（平行四辺形ノ面積）

ナル式ヲ得ル。コノ條件ノ下ニξノ最大値ヲ求メレバヨイ。勿論文字ハスベテ正數ヲ表ハシ、aハ常数ヲ表ハシテ居ル。

消去ノ中途ノ式ハ略ストシテ x, y, v ヲ消去シ得タ式ヲ u ニツイテ整頓スルト

$$2a(3\xi+a^2-1)u^2+(5\xi^2+10a^2\xi+a^4-1)u$$
$$+2a\xi(3\xi+a^2+1)=0 \text{ ------- (A)}$$

トナル。コノ方程式ガ正根ヲモツタメニハ

$$3\xi+a^2-1<0 \text{ ------------------- (B)}$$

又ハ

$$5\xi^2+10a^2\xi+a^4-1<0 \text{ ---------- (C)}$$

デナケレバナラナイ。

$a=\frac{1}{2}$ トスルト (B)モ(C)モ 冬$<\frac{1}{4}$ヲ與ヘル。コノトキY軸ノ右側ノ近似度ト左側ノ近似度ガ同一ノ制限ヲ受ケ、ソレガ$\frac{1}{4}$トナルノデアルカラみんこうすきーノ定理ニカヘツタワケデアル。

故ニ $a>\frac{1}{2}$ ナルトキハY軸ノ左側ト右側ヲ入レカヘテ考ヘレバヨイコトニナルカラ $a<\frac{1}{2}$ ノ場合ダケ考ヘレバヨイ。

(B) カラ　　冬$<\dfrac{1-a^2}{3}$

(C) カラ　　冬$<\sqrt{\dfrac{1+4a^4}{5}}-a^2$

コノ二ツノ不等式ノ右辺ヲ比較スルト

$$\frac{1-a^2}{3}<\sqrt{\frac{1+4a^4}{5}}-a^2$$

トオケバ

$$(a^2-1)(4a^2-1)>0$$

ナル不等式ヲ得ルガ、コレハ上ニ考ヘタ a ノ範囲デ成立スル。故ニ求ムル不等式ハ

$$冬<\sqrt{\frac{1+4a^4}{5}}-a^2$$

デアル。原問題ニカヘルト

$$\lim_{x>0}|x(\alpha x-y+\beta)|=P,\qquad (x,\ y\ \text{ハ整数})$$
$$\lim_{x<0}|x(\alpha x-y+\beta)|=N.$$

トオケバ

$$P \leqq \sqrt{\frac{1+4N^2}{5}} - N \qquad (但シ\ N<\frac{1}{4}\ ノトキ) \cdots\cdots\cdots (D)$$

コノ右辺ハ $N=0$ ノトキ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ トナリ、$N>0$ ノトキ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ヨリ小サイ、故ニコノ定理ハ Klimcline ノ定理ヲ含ムワケデアル。

次ニモウ少シ詳シク考ヘテ見ヨウ。コノ結果ハ (C) カラ得タノデアルカラ、コレガ等号ヲトルノハ (A) ノ中項ガ0トナルトキデアル。ソノトキ (B) ハ成立シナイノデアルカラ初項ハ正トナリ、Aハ虚根ヲモツコトニナル。故ニ (D) ノ等号ノ近クハ (A) ガ実根ヲモツト云フ條件カラ除去スルコトガ出来ルデアラウ。サウスレバ (D) ハモット精密ニ出来ルワケデアル。(A) ノ判別式ヲ作ルト

$$(5\xi^2+10a^2\xi+a^4-1)^2 \geqq 4a^2\xi\left\{(3\xi+a^2)^2-1\right\}$$

コノ式ノ左辺ハ $\xi=\sqrt{\frac{1+4a^4}{5}}-a^2$ ノトキ0，ξ ガコレヨリ減ズレバ増シ，右辺ハ $\xi=\sqrt{\frac{1+4a^4}{5}}-a^2$ ノトキ正デ ξ ガコレヨリ減ズレバ減ジ $\xi=\frac{1-a^2}{3}$ ノトキ0トナル。故ニ

$$\sqrt{\frac{1+4a^4}{5}}-a^2 > \xi_1 > \frac{1-a^2}{3}$$

ナルアル ξ_1 デコノ式ガ等号ヲトル所ガアル。コノ ξ_1 ガ求メラレヽバ上ノ結果ハ

$$\xi < \xi_1$$

ト改良サレルワケデアル。目下 ξ_1 ノ代リニ何カ簡単ノ

式デ之レニ近イモノヲ求メタイト工夫シテ居ル所デアル。

——七月十一日記——